CHAPITRE 5

RACINES $n^{\text{ièmes}}$ EXPOSANTS DANS $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

LOGARITHMES

SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES

1 Racines n-ièmes et exposants dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

THEOREME 1 Pour tous nombres strictement positifs x et y, on a $x = y \Leftrightarrow x^n = y^n$ et $n \in \mathbb{Z}^*$.

Indication : démontrer pour $n \in \mathbb{N}^*$, puis avec $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = (\frac{1}{x})^n$.

Définition 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si n est pair et $a \in \mathbb{R}_+$ ou si n est impair et $a \in \mathbb{R}$, on a

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow a = b^n$$ et b s'appelle **racine n-ième** de a.

<u>Remarques</u>

1 $(\sqrt[n]{a})^n = a$

2 $\sqrt[n]{b^n} = b$ si n est impair et $|b|$ si n est pair.

THEOREME 2 Pour tous nombres positifs x et y, on a $\sqrt[n]{x\,y} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$

Exercices

1 *Montrer que l'on a* $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ si $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$.

2 *Pour* $a > 0$ *et* $\{n, p, q\} \subset \mathbb{N}^*$, *démontrer*

a) $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$ b) $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$ c) $\sqrt[nq]{a^{pq}} = \sqrt[n]{a^p}$

3 *Simplifier les racines.*

a) $\sqrt[6]{a^4b^2}$ b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{20}}}$ c) $\sqrt[7]{\sqrt[3]{-x^{21}}}$ d) $(\sqrt[7]{-a\sqrt{3a}})^{14}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{75}}$ f) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}\sqrt{2}}$ g) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{\sqrt[4]{3}}}$ h) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}$

4 *Effectuer les opérations et rendre rationnels les dénominateurs.*

a) $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189} + \sqrt[3]{448}$ b) $\sqrt[6]{16} - \sqrt[4]{4} + \sqrt[3]{-4}$ c) $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{-3} + \sqrt[3]{-81}$

d) $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{375}$ e) $\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32}$ f) $(\sqrt[3]{a^5} + \sqrt[3]{b^3})(\sqrt[3]{a^5} - \sqrt[3]{b^3})$

e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$ f) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2} + 1}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}}$

THEOREME 3 Pour $a > 0$ et $(p,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, si l'on pose $a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$, alors

1. $a^{\frac{p}{n}} \cdot a^{\frac{p'}{n'}} = a^{\frac{pn' + np'}{nn'}} = a^{\frac{p}{n} + \frac{p'}{n'}}$
2. $a^{\frac{p}{n}} \cdot b^{\frac{p}{n}} = (ab)^{\frac{p}{n}}$
3. $(a^{\frac{p}{n}})^{\frac{p'}{n'}} = a^{\frac{pp'}{nn'}} = a^{\frac{p}{n} \cdot \frac{p'}{n'}}$ exposants dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

Exercice 5

Simplifier les expressions en ne laissant que des exposants positifs.

a) $a^{\frac{3}{4}}\, a^{\frac{4}{6}}$ b) $a^{-\frac{1}{2}}\, a^{\frac{7}{4}}\, a^{-\frac{6}{5}}$ c) $\left(\frac{x^{-2}y^{3}}{x^{3}y^{-2}}\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot \left(\frac{y^{3}x^{-3}}{x^{3}y^{-3}}\right)^{-1}$

d) $9^{-0.3} \cdot 9^{0.7} \cdot 9^{1.1} \cdot 9$ e) $(100^{0.4})^{1.25}$ f) $(a^{\frac{1}{5}} : a^{\frac{1}{10}}) \cdot a^{\frac{2}{5}}$

2 Logarithmes

2.1 Isomorphisme

Exercice 6

Démontrer que si l'on pose $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 10^{n} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$, *alors* $(E, \cdot)$ *est un groupe commutatif, c'est-à-dire que l'opération est une application de* E^2 *vers* E, *qu'elle est associative, commutative, possède un élément neutre et que chaque élément possède un symétrique.*

THEOREME 4 Il existe une bijection f de $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 10^{n} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$ vers $\mathbb{Z}$ telle que $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Indication : utiliser $f(10^{n}) = n$.

Définition 2 Soit $(A, *)$ et $(B, \circ)$ deux structures et f une bijection de A vers B. La bijection f est appelée **isomorphisme** de $(A, *)$ vers $(B, \circ)$ si et seulement si $\forall \{x, y\} \subset A$ $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$.

Exercice 7

Avec l'isomorphisme f du théorème précédent, démontrer que l'on a

a) $f(1) = 0$ *(les éléments neutres des opérations respectives se correspondent)* *b)* $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ *(les éléments symétriques se correspondent)*

c) $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

THEOREME 5

Si f est un isomorphisme du groupe $(A,*)$ vers une structure $(B, \circ)$, alors $(B, \circ)$ est aussi un groupe et

- l'élément neutre du groupe $(B, \circ)$ est l'image du neutre de $(A,*)$
- l'image du symétrique d'un élément x de A est le symétrique de l'image de x dans B
- si $(A,*)$ est un groupe commutatif, $(B, \circ)$ l'est aussi.

Remarque

Dans le cas d'un isomorphisme, les deux structures ont donc les mêmes propriétés et, connaissant les propriétés de l'une, on en déduit les propriétés de l'autre.

Exercices

8 *Si* $F = \{x \in \mathbf{R} \mid x = 2^n \text{ et } n \in \mathbf{Z}\}$, *alors* $(F, \cdot)$ *est un groupe commutatif.*

9 *Montrer qu'il existe un isomorphisme* f *de* $F = \{x \in \mathbf{R} \mid x = 2^n \text{ et } n \in \mathbf{Z}\}$ *vers* $\mathbf{Z}$ *tel que* $f(xy) = f(x) + f(y)$. *Déterminer* $f(1)$, $f(\frac{1}{x})$, $f(\frac{x}{y})$, $f(x^n) = n\,f(x)$.

10 *Pour l'isomorphisme* f *de l'exercice 4, peut-on trouver* x *dans les cas suivants?*

a) $f(x) - 1 = f(x - 1)$ *b)* $f(x - 1) = f(3x - 2)$

c) $f(x^2 - 15) = 2\,f(x - 3)$ *d)* $f(2) = f(x^2 - 2x - 8) - f(x^2 - 7x + 12)$

2.2 La fonction logarithme

Exercice 11

Si $G = \{x \in \mathbf{R} \mid x = a^n \text{ et } a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\} \text{ et } n \in \mathbf{Q}\}$, *démontrer que* $(G, \cdot)$ *est un groupe commutatif isomorphe au groupe* $(\mathbf{Q}, +)$.

On admet sans démonstration le théorème suivant.

THEOREME 6 et DEFINITION

Il existe un isomorphisme croissant du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ vers le groupe $(\mathbb{R}, +)$ tel que $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ et $\log_a(a) = 1$. L'isomorphisme $\log_a$ s'appelle **logarithme de base a**.

Notation : pour la base 10, $\log_{10} = \log$

Exercices

12 *Pourquoi a-t-on* $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\log_a(1) = 0$, $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$?

13 *Vérifier que* $\log_a(1) = 0$ *avec* $\log_a(1) = \log_a(1 \cdot 1) = \log_a(1) + \log_a(1)$.

14 *Vérifier que* $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$ *avec* $\log_a(\frac{x}{x}) = \log_a(1) = 0$.

15 *Montrer que* $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

16 *Démontrer (par récurrence)*

a) $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$, *puis* $n \in \mathbb{Z}$.

b) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\log_a(x^{\frac{1}{n}}) = \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a(x)$; *en déduire* $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$ *pour* $n \in \mathbb{Q}$.

On admet sans démonstration la propriété pour $n \in \mathbb{R}$.

17 *Transformer*

1) $\log \frac{ab^3}{c}$	2) $\log 3a^5 \sqrt[3]{b^n}$	3) $\log 0{,}1$	4) $\log 1'000$
5) $\log \frac{1}{10^5}$	6) $\log 200$	7) $\log 0{,}1\, a^3bc^2$	8) $\log (10a^2 b)^2$

18 *Avec* $\log 2 \cong 0{,}30103$, *donner les valeurs approchées (sans utiliser la calculatrice).*

1) $\log 2 + \log 5$	2) $\log 4 + 2$	3) $\log 8 + \log 5$	4) $5 \log 2 + \log 5$
5) $\log 8 - \log 2$	6) $\frac{1}{4} \log 16$	7) $\log 2^{40} + 1$	8) $6 \log 2 - \log 64$
9) $\log 5$ *(à l'aide de l'ex. 1)*		10) $\log 25$	11) $\log \frac{25}{2}$

19 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$. *(Tenir compte du domaine de définition de log)*

1) $\log(2x+1) = 1$	2) $\log 2x - \log 3 = \log(3x-2)$
3) $\log x - 2 = -\log(x+4)$	4) $\log(x+1) - \log(x-1) = 0$
5) $\log(x+1) + \log(x+3) = 1$	6) $5 \log \lvert x \rvert = 2$
7) $2 \log \lvert 2x+1 \rvert = 3$	8) $\log 2x - 1 = \log \lvert 3x-1 \rvert$

20 *Avec* $\log 3 \cong 0{,}47712$, *calculer* $\log 9$, $\log \sqrt{3}$, $\log \frac{1}{3}$, $\log 27$, $\log \frac{1}{27}$, $\log 10$. *Représenter graphiquement la fonction* log *à l'aide des images calculées.*

21 *La touche* LN *(correspondant à la fonction logarithme naturel, qu'on écrit aussi* ln) *de la calculatrice permet de trouver une valeur approchée de la base* e *du logarithme naturel. Si* $\log_e(x) = 1$, *alors l'ancêtre de* 1 *est la base de ce logarithme.*

Représenter graphiquement ln *en calculant quelques images. Pour quels* x *a-t-on* $\ln x = 0$, $\ln x > 0$, $\ln x < 0$?

22 *Résoudre dans* $\mathbb{R}^2$

1) $\begin{cases} x + y = 70 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \ln x^2 = \ln y \\ \ln x + \ln y = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \ln 3x = -\ln y \\ \ln(3x - y) = \ln 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log x - \log 5 = 1 \\ \log x^3 + \log y^2 = \log 32 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log x = \log y + 1 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 2 \\ 2\ln x - 3\ln y = -1 \end{cases}$

2.3 La fonction exponentielle

La fonction $\log_a$ étant une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ vers $\mathbf{R}$, sa réciproque est une bijection de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}_+^*$.

Définition 3 On appelle **fonction exponentielle de base a** la réciproque de la fonction $\log_a$.

$\exp_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$

$x \mapsto y = \exp_a(x)$ et $y = \exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y)$

Notation : $\exp_a(x) = a^x$ et $a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ et $x \in \mathbf{R}$

Exercices

23 *Montrer que la fonction exponentielle de base* a *possède les propriétés de la puissance à exposant dans* $\mathbf{Z}$.

24 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$.

1) $10^x = \frac{2}{3}$	2) $10^{x+1} = 1'000$	3) $3^x = 0$
4) $3^x = 1$	5) $3^{2x+1} = 27$	6) $10^x = 5$
7) $20^x = 4$	8) $7^2 = 7^{x+1}$	9) $4 \cdot 2^x = 0{,}25$
10) $4^x = 0{,}0625$	11) $2^x + 4^x = 272$	12 $4^{x+1} + \frac{64}{4^x} = 257$

2.4 Changement de base

Si $y = a^x$, alors $\log_a y = \log_a a^x = x \log_a a = x \cdot 1 = x$

et $\log_b y = \log_b a^x = x \log_b a = \log_a y \cdot \log_b a$

THEOREME 7	$\log_a y = \dfrac{\log_b y}{\log_b a}$

COROLLAIRE	$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

Exercices

25 *A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée.*

1) $\log_2 10$ 2) $\log_{10} 2$ 3) $\log_3 7{,}1$ 4) $\log_2 8$

5) $\log_8 (\sqrt{2})^6$ 6) $\log_8 \sqrt{2}$ 7) $\log_{0,5} 3$ 8) $\log_2 5 + \log_3 6$

26 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$.

1) $\log x + 2\log_5 x = 0$ 2) $\log_2 x - \log_3 x = 0$ 3) $5^x - 625 = 0$

4) $5^x = 500$ 5) $2^{x+1} = 10^4$ 6) $40 \cdot 2^x = 12 \cdot 6^{x-1}$

3 Suites arithmétiques et géométriques

3.1 Les suites

Exercices

27 *Calculer* f(n) *si* $n \in \{1; 2; 2; 4\}$ *et*

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$

$$n \mapsto f(n) = u_n \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f(n) = 10 & \text{et } n = 1 \\ \text{ou} & \\ f(n) = f(n-1) + 5 & \text{et } n \neq 1 \end{cases}$$

f est-elle une application croissante?

28 *On donne* 2, 4, 6, 8, 10, ... Qu'est-ce que u_1, u_2, u_3 ? *Proposer une formule pour* $u_n = f(n)$.

Avec
$$\begin{array}{rcl} 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 48 + 50 & = & S_{25} \\ \underline{50 + 48 + \dots \quad \dots + 4 + 2} & \underline{=} & \underline{S_{25}} \\ 52 + 52 + \dots \quad \dots + 52 + 52 & = & 2S_{25} \end{array}$$

calculer S_{25} *la somme des* 25 *premiers termes de la suite.*

29 *On donne sur* $\mathbb{N}^*$ *l'application* f *avec* $f(n) = 5 + 3(n-1)$. f *est-elle monotone?*

Définition 4 On appelle **suite de nombres réels** toute application f telle que

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n$$ où u_n s'appelle le n-ième terme de la suite.

Notation : la suite s'écrit aussi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou (u_n).

Exercices

30 *La suite* $(7 \cdot 3^{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est-elle monotone?*

31 *Calculer* u_9, u_{10}, u_{11} *si*

1) $u_n = -2n$ 2) $u_n = n(n-1)$ 3) $(3n+2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 4) $u_n = (2n+1)(1-3n)$

32 *Qu'est-ce que* $((-2)^n)_{n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}}$? *Et* $(-2^n)_{n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}}$?

33 *Etudier la monotonie des suites suivantes.*

1) $(-2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 2) $(3 \cdot (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 3) $(2n + 3 \cdot (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

3.2 Les suites arithmétiques

Définition 5 Une **suite arithmétique** f est une suite telle que $f(n) = f(n-1) + r$ ou $u_n = u_{n-1} + r$, r s'appelant **raison** de la suite.

Exercices

34 Si $f(n) = 4 + n$*, a-t-on une suite arithmétique?*

35 Les entiers positifs pairs correspondent-ils à une suite arithmétique? Quelle est la somme des 100 premiers entiers positifs pairs?
Quelle est la somme des 100 entiers pairs consécutifs dont le premier terme est 100?

36 Avec $f(n) = -5 - 2n$*, a-t-on une suite arithmétique?*

THEOREME 8 Pour une suite arithmétique,

1. le n-ième terme est donné par $u_n = u_1 + (n - 1) \cdot r$
2. la somme de deux termes respectivement équidistants du premier et du dernier égale la somme du premier et du dernier
3. la somme des n premiers termes est donnée par $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$

Exercices

37 Peut-on trouver une suite arithmétique de 10 termes dont le premier est 10 et le dernier 25 ?

38 Trouver u_{20} *et* S_{20} *si l'on donne 3, 8, 13, 18, 23, ...*

39 Calculer la somme des entiers multiples de 3 entre 1 et 100. Calculer la somme des entiers x *tels que* $1 \leq x \leq 100$ *si ces entiers sont non multiples de 3.*

40 Trouver a *si* $a - 1$, $a + 3$, $3a - 1$ *sont les trois premiers termes d'une suite arithmétique.*

41 Insérer 6 termes d'une suite arithmétique entre 7 et 77.

42 Combien de termes d'une suite arithmétique faut-il insérer entre 2 et 38 si la somme des termes est 200 ?

3.3 Les suites géométriques

Définition 6 Une **suite géométrique** f est une suite telle que $f(n) = f(n - 1) \cdot r$ ou $u_n = u_{n-1} \cdot r$ avec $r \notin \{0, 1\}$, r s'appelant la **raison** de la suite.

Exercices

43 *Les suites suivantes sont-elles des suites géométriques?*

1) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ 2) $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$ 3) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $u_n = 1$.

4) $((-3)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 5) 3, 9, 6, 27, 9, 81, 12, 243, 15, 729, 18, ... 6) $12, -4, \frac{4}{3}, -\frac{4}{9}, \ldots$

THEOREME 9	Pour une suite géométrique, le n-ième terme est donné par $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$

Exercices

44 *Si l'on donne* $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \ldots,$ *calculer* u_{15}.

45 *Dans une suite géométrique, si* $u_3 = 5$ *et* $u_6 = 125$, *calculer* u_1 *et* r.

46 *Si* $f(n) = 0{,}15 \cdot 2^{n-1}$, f *est-elle une suite géométrique?*

On pose $S_9 = 0{,}15 + 0{,}15 \cdot 2 + 0{,}15 \cdot 2^2 + 0{,}15 \cdot 2^3 + \ldots + 0{,}15 \cdot 2^7 + 0{,}15 \cdot 2^8$

$2\,S_9 = 0{,}15 \cdot 2 + 0{,}15 \cdot 2^2 + 0{,}15 \cdot 2^3 + \ldots + 0{,}15 \cdot 2^7 + 0{,}15 \cdot 2^8 + 0{,}15 \cdot 2^9$

et $S_9 - 2\,S_9 = 0{,}15 - 0{,}15 \cdot 2^9 = 0{,}15(1 - 2^9) = S_9\,(1 - 2)$

Calculer la somme des 9 *premiers termes de cette suite.*

THEOREME 10	La somme des n premiers termes d'une suite géométrique est $S_n = \frac{u_1\,(1 - r^n)}{1 - r}$

Exercices

47 *On a 10 cases numérotées de 1 à 10. Dans la première case, on met* 2 *billes, dans la deuxième* 2^2 *billes, dans la troisième* 2^3 *billes, etc. Combien faut-il de billes pour remplir toutes les cases?*

48 *Avec* 3, 9, 6, 27, 9, 81, 12, 243, 15, 729, 18, ... , *trouver les termes* u_{49} *et* u_{50}. *Calculer la somme des* 50 *premiers termes de cette suite.*

49 *Existe-t-il trois entiers successifs formant le début d'une suite géométrique?*

50 *Trouver le premier terme d'une suite géométrique de raison* 0,3 *si* $S_9 = 146'484{,}3$.

51 *Insérer quatre termes d'une suite géométrique entre* 8 *et* $\frac{1}{4}$.

52 *Quelle est la moyenne arithmétique de* 1 *et* 100 ? *Quelle est la moyenne géométrique de* 1 *et* 100 ? *Démontrer, pour* $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$, *que la moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique.*

53 *Calculer* x, y *et* z *si* (x, y, z) *est une suite arithmétique,* (y, x, z) *une suite géométrique et* $xyz = 216$.

54 *Déterminer la suite géométrique de* 5 *termes dont la somme des termes est* 484 *et celle des termes de rang pair est* 120 .